



خب در این مرحله باید قسمت حقیقی و موهومی را جداگانه بنویسیم، بهترین کار این است که صورت و مخرج را در $e^{-\frac{\pi}{n}i}$ ضرب کنیم:

$$S_1 = \frac{-2 \times 1}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}i}} = \frac{-2}{1 - [\cos(-\frac{\pi}{n}) + i \sin(-\frac{\pi}{n})]} = \frac{-2}{(1 - \cos \frac{\pi}{n}) + i \sin \frac{\pi}{n}}$$

صورت و مخرج را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$S_1 = \frac{-2[(1 - \cos \frac{\pi}{n}) - i \sin \frac{\pi}{n}]}{(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2 - i^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{-2 + 2 \cos \frac{\pi}{n} + 2i \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \cos^2 \frac{\pi}{n} - 2 \cos \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{-2 + 2 \cos \frac{\pi}{n}}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{n}} + i \frac{2 \sin \frac{\pi}{n}}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{n}} = -1 + i \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}}$$

همان طور که ابتدا گفتیم عبارت خواسته شده قسمت حقیقی S_1 است، که برابر با -1 به دست آمد، بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} (-1) = \sin(0) \times (-1) = 0$$

مثال ۴۸: حاصل انتگرال $I = \int_0^1 e^{ax} \cos bx dx$ را به کمک اعداد مختلط حساب کنید.

پاسخ: حاصل این انتگرال را قبلاً به کمک قاعده‌ی جزء به جزء حساب کردیم، اما با استفاده از اعداد مختلط راحت‌تر حل می‌شود. می‌توانیم به جای انتگرال فوق،

قسمت حقیقی انتگرال $\int_0^1 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx$ را حساب کنیم. برای این منظور از رابطه‌ی $e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$ استفاده می‌کنیم:

$$I = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx \right] = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 (e^{ax} \cdot e^{ibx}) dx \right] = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 e^{(a+ib)x} dx \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} \right]_0^1$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{a+ib} [e^{a+ib} - 1] \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{a-ib}{a^2+b^2} [e^a (\cos b + i \sin b) - 1] \right\} = \frac{e^a (a \cos b + b \sin b) - a}{a^2 + b^2}$$

واضح است اگر می‌خواستیم حاصل انتگرال $\int_0^1 e^{ax} \sin bx dx$ را حساب کنیم، باید قسمت موهومی انتگرال فوق را حساب می‌کردیم.

مثال ۴۹: حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ ، برابر کدام گزینه است؟

$$(۱) e^{\sin x} \cos(\sin x) \quad (۲) e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (۳) e^{\cos x} \cos(\sin \pi x) \quad (۴) e^{\sin x} \cos(\sin \pi x)$$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = e^u$ ، اگر فرض کنیم در این سری $u = e^{ix}$ آن‌گاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} \cdot e^{i \sin x} = e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)]$$

بنابراین خواهیم داشت:

اما سری داده شده در صورت سؤال قسمت حقیقی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$ است، پس جواب سؤال به صورت $(e^{\cos x} (\cos(\sin x)))$ است. واضح است اگر مقدار سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x}{n!}$$

سؤال شده بود، آن‌گاه حاصل برابر با $e^{\cos x} \sin(\sin x)$ می‌شد.

مثال ۵۰: با بسط $\frac{1}{e^{i\theta} - k}$ ، و مساوی گرفتن قسمت موهومی، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta$ برابر است با $(-1 < k < 1)$:

(مکانیک - سراسری ۸۶)

$$(۱) \frac{-k \sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2} \quad (۲) \frac{k \sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2} \quad (۳) \frac{\sin \theta}{1 - 2k \cos \theta + k^2} \quad (۴) \frac{k \sin \theta}{1 + 2k \cos \theta + k^2}$$

پاسخ: گزینه «۳» بسط را می‌توانیم به صورت مقابل بنویسیم:

$$S = \frac{1}{e^{i\theta} - k} = \frac{1}{e^{i\theta}} \left[\frac{1}{1 - \frac{k}{e^{i\theta}}} \right] = \frac{1}{e^{i\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} (k e^{-i\theta})^n$$

با توجه به این که $|k| < 1$ و $|e^{i\theta}| = 1$ ، لذا $\left| \frac{k}{e^{i\theta}} \right| < 1$ و توانستیم بسط را بنویسیم، اما ادامه حل به شکل زیر است:

$$S = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (k e^{-i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty} k^n e^{-i(n+1)\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n [\cos(n+1)\theta - i \sin(n+1)\theta] = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta - i \sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta, (۱)$$